Journal of Geometry and Physics 9 (1992) 295-302
North-Holland

JOURNAL OF
GEOMETRY AND
PHYSICS

Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois

S. Rahmani

Laboratoire de Mathématiques et Informatique, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cédex, France

Reçu le 12 juin 1991

We give a classification of lorentzian three-dimensional unimodular Lie groups. We deduce examples of flat left invariant pseudo-metrics on Lie groups and a classification, up to automorphisms, of the left invariant lorentzian metrics on the Heisenberg group H_3.

Keywords: *Lorentz metrics on Lie groups*
1991 MSC: 53 C 50, 22 E 15, 81 R 99

Introduction

Milnor [5] a classifié les groupes de Lie unimodulaires riemanniens de dimension trois. Sa méthode est basée sur le résultat classique, qu'un endomorphisme auto-adjoint par rapport à une métrique définie positive est diagonalisable. On se propose d'adapter cette méthode pour classifier les groupes de Lie unimodulaires lorentziens en utilisant la classification donnée dans la réf. [2] des endomorphismes auto-adjoints par rapport à une métrique de Lorentz. Comme applications, tout d'abord, on donne des exemples de groupes de Lie de dimension trois admettant une métrique pseudo-riemannienne plate. On retrouve ainsi les résultats de Nomizu [6]. Ensuite, on s'intéresse au groupe de Heisenberg de dimension trois pour lequel on donne la classification, à automorphisme de l'algèbre de Lie près, des métriques de Lorentz invariantes à gauche.

1. Préliminaires

Dans tout ce qui suit G désigne un groupe de Lie de dimension trois muni d'une métrique de Lorentz invariante à gauche notée $\langle\ ,\ \rangle$, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie sur laquelle on choisit une orientation.

Dans le but d'étudier les algèbres de Lie de dimension trois, on généralise la notion du produit vectoriel aux métriques de Lorentz de la manière suivante:

Proposition–Définition 1.1. *L'application* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ *définie par* $(X_1, X_2, X_3) \to \det_{(a_i)}(X_1, X_2, X_3)$ *est indépendante de la base pseudo-orthonormale directe* (a_i), *on l'appelle produit mixte de* X_1, X_2, X_3 *et on le note* (X_1, X_2, X_3).

Démonstration. En effet soient (a_i) et (a'_i) deux bases pseudo-orthonormales directes de G. X_1, X_2, X_3 étant trois vecteurs de $\mathfrak{g}$, considérons les endomorphismes u, f et f' définis par

$$u(a'_i)=a_i\,, \qquad f(a_i)=X_i\,, \qquad f'(a'_i)=X_i\,.$$

Nous avons $f'=f\circ u$ d'où $\det f'=\det f \det u$. Or u est une transformation pseudo-orthogonale directe donc $\det u=1$, d'où la proposition. □

Définition 1.2. Pour tout couple (X_1, X_2) de vecteurs de $\mathfrak{g}$, il existe un unique vecteur Z tel que

$$(X_1, X_2, Y)=\langle Z, Y\rangle=\langle Y, Z\rangle \quad \forall Y\in\mathfrak{g}\,.$$

Z est appelé produit vectoriel de X_1, X_2 et on note $Z=X_1\times X_2$.

De la définition du produit vectoriel, on déduit facilement la:

Proposition 1.3.
(i) Le produit vectoriel est invariant par les transformations pseudoorthogonales directes.
(ii) Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une base pseudo-orthogonale de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\langle e_1, e_1\rangle=\langle e_2, e_2\rangle=1$ *et* $\langle e_3, e_3\rangle=-1$, *alors* $e_1\times e_2=-e_3$, $e_2\times e_3=e_1$ *et* $e_3\times e_1=e_2$. □

2. Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires

Afin de donner les formes réduites de toutes les algèbres de Lie unimodulaires de dimension trois munies de métriques de Lorentz invariantes à gauche, on démontre le lemme suivant:

Lemme 2.1. *La structure de l'algèbre de Lie de G est liée au produit vectoriel par la formule*

$$[u, v]=L(u\times v)\,,$$

où L est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ *défini de manière unique. Le groupe de Lie G est unimodulaire si et seulement si la transformation L est auto-adjointe.*

Démonstration. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base pseudo-orthonormale de $\mathfrak{g}$, on définit la transformation linéaire $L: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par

$$L(e_1) = [e_2, e_3], \qquad L(e_2) = [e_3, e_1], \qquad L(e_3) = [e_2, e_1].$$

La proposition 1.3 implique $L(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]$, par conséquent $L(u \times v) = [u, v]$ pour u, v quelconques. □

On rappelle qu'un groupe de Lie G est unimodulaire si et seulement si trace $\mathrm{ad}(v) = 0$ pour tout $v \in \mathfrak{g}$. Posons $L(e_i) = \alpha_{ij} e_j$, on a alors

$$\operatorname{trace} \mathrm{ad}(e_1) = -\alpha_{32} - \alpha_{23},$$

$$\operatorname{trace} \mathrm{ad}(e_2) = \alpha_{31} + \alpha_{13},$$

$$\operatorname{trace} \mathrm{ad}(e_3) = \alpha_{21} - \alpha_{12}.$$

D'autre part, on rappelle également (voir la réf. [7]) qu'un opérateur auto-adjoint sur un espace vectoriel de Lorentz de dimension trois a une matrice (relativement à une base pseudo-orthonormale $\{e_3, e_2, e_1\}$) de la forme

$$\begin{pmatrix} a & X \\ -{}^tX & B \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbb{R}$, B est une matrice 2×2 symétrique et X une matrice quelconque 1×2. Ainsi G est unimodulaire si et seulement si L est auto-adjointe.

D'après la réf. [2], L peut être réduite par des transformations pseudo-orthogonales qui laissent invariante la métrique de Lorentz, à une forme particulière caractérisée par la nature des valeurs propres λ_i et des espaces propres L_{λ_i} de L.

Cas 1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ et $\dim L_{\lambda_i} = 1$. Dans ce cas, L peut être réduite à la forme

$$\begin{aligned} L(e_1) &= \beta e_1 + \alpha e_2 + \alpha e_3, \\ L(e_2) &= \alpha e_1 + \beta e_2, \qquad\qquad \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}. \\ L(e_3) &= -\alpha e_1 + \beta e_3, \end{aligned}$$

On en déduit la forme normale pour le crochet

$$(\mathfrak{g}_1) \quad \begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha e_1 - \beta e_3, \\ [e_1, e_3] &= -\alpha e_1 - \beta e_2, \\ [e_2, e_3] &= \beta e_1 + \alpha e_2 + \alpha e_3. \end{aligned}$$

Proposition 2.2. *Les groupes de Lie ayant* $(\mathfrak{g}_1)$ *comme algèbre de Lie sont isomorphes à*

(i) $\mathrm{O}(1, 2)$ *ou* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *si* $\beta \neq 0$,

(ii) $\mathrm{E}(1, 1)$, *le groupe de mouvements rigides de l'espace de Minkowski de dimension deux, si* $\beta = 0$.

Démonstration. Si $\beta\neq 0$, alors dim $\mathfrak{g}_1'=3$ ($\mathfrak{g}_1'$ étant l'algèbre dérivé de $\mathfrak{g}_1$), d'après la classification de Jacobson [3] $\mathfrak{g}_1$ est isomorphe à so(3) ou sl(2, $\mathbb{R}$). Comme so(3) est compacte, sa forme de Killing–Cartan est définie négative alors que celle de $\mathfrak{g}_1$ a pour signature $(+,+,-)$. Donc nécessairement $\mathfrak{g}_1$ est isomorphe à sl(2, $\mathbb{R}$).

Si $\beta=0$, $\mathfrak{g}_1$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de E(1, 1) définie par

$$[v_2,v_3]=v_1\,,\qquad [v_3,v_1]=-v_2\,,\qquad [v_1,v_2]=0\,,$$

par l'isomorphisme

$$f(v_1)=-e_1+e_2+e_3\,,\qquad f(v_2)=e_1+e_2+e_3\,,\qquad f(v_3)=1/\alpha e_1+1/\alpha e_3\,. \qquad \square$$

Remarque. Les autres cas peuvent être démontrés de la même manière; on omettra alors leur démonstration.

Cas 2. $\lambda_1\in\mathbb{R}$ et $\lambda_2=\bar{\lambda}_3\in\mathbb{C}$. Dans ce cas, L peut être réduite à la forme

$$\begin{aligned} L(e_1)&=\alpha e_1\,,\\ L(e_2)&=\beta e_2-\gamma e_3\,,\quad \gamma\neq 0\,.\\ L(e_3)&=\gamma e_2+\beta e_3\,, \end{aligned}$$

La forme normale du crochet est alors

$$(\mathfrak{g}_2)\quad \begin{aligned} [e_2,e_3]&=\alpha e_1\,,\\ [e_3,e_1]&=\beta e_2-\gamma e_3\,,\quad \gamma\neq 0\,.\\ [e_2,e_1]&=\gamma e_2+\beta e_3\,, \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Les groupes de Lie ayant $\mathfrak{g}_2$ comme algèbre de Lie sont isomorphes à*

(i) O(1, 2) *ou* SL(2, $\mathbb{R}$) *si* $\alpha\neq 0$,

(ii) E(1, 1) *si* $\alpha=0$. $\square$

Cas 3. L est diagonalisable. Dans ce cas, la forme normale du crochet est

$$(\mathfrak{g}_3)\quad \begin{aligned} [e_2,e_3]&=\alpha e_1\,,\\ [e_3,e_1]&=\beta e_2\,,\\ [e_2,e_1]&=\gamma e_3\,. \end{aligned}$$

Proposition 2.4. *Les groupes de Lie associés à $\mathfrak{g}_3$ sont*

signes de α	β	γ	Groupes de Lie associés
$+$	$+$	$+$	$SL(2,\mathbb{R})$ ou $O(1,2)$
$+$	$-$	$-$	$SL(2,\mathbb{R})$ ou $O(1,2)$
$+$	$+$	$-$	$SO(3)$ ou $SU(2)$
$+$	$+$	0	$E(2)$
$+$	0	$-$	$E(2)$
$+$	$-$	0	$E(1,1)$
$+$	0	$+$	$E(1,1)$
$+$	0	0	H_3
0	0	$-$	H_3
0	0	0	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$

où $E(2)$ *désigne le groupe des mouvements rigides de l'espace euclidien de dimension deux et* H_3 *le groupe de Heisenberg.* □

Cas 4. $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$ et $\dim L_{\lambda_2}=1$ ou $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ et $\dim L_{\lambda_1}=2$. La forme normale du crochet est alors

$$(\mathfrak{g}_4)\quad \begin{aligned}&[e_2,e_3]=\alpha e_1\,,\\ &[e_3,e_1]=\beta e_2-e_3\,,\\ &[e_2,e_1]=e_2-(2\eta-\beta)e_3\,,\end{aligned}\qquad \eta=\pm1\,.$$

Proposition 2.5. *Les groupes de Lie associés à* $\mathfrak{g}_4$ *sont*

(i) $\eta=1$

α	β	groupes de Lie
$\neq0$	$\neq1$	$SL(2,\mathbb{R})$ ou $O(1,2)$
0	$\neq1$	$E(1,1)$
<0	1	$E(1,1)$
>0	1	$E(2)$
0	1	H_3

(ii) $\eta=-1$

α	β	groupes de Lie
$\neq0$	$\neq-1$	$SL(2,\mathbb{R})$ ou $O(1,2)$
0	$\neq-1$	$E(1,1)$
>0	-1	$E(1,1)$
<0	-1	$E(2)$
0	-1	H_3

Remarque. On notera que les structures correspondant à $\eta = 1$ et $\eta = -1$ sont isométriques à travers des transformations lorentziennes à coefficients imaginaires.

3. Métriques de Lorentz plates

L'existence de métriques de Lorentz invariantes à gauche plates (c'est-à-dire dont le tenseur de courbure est nul), contrairement au cas des métriques définies positives, semble être un phénomène plus fréquent. Utilisant la classification précédente, on donne les exemples de groupes de Lie possédant une métrique de Lorentz plate. On retrouve ainsi les résultats de Nomizu [6].

Théorème 3.1. *Les groupes de Lie suivants possèdent une métrique de Lorentz invariante à gauche plate*: $E(2)$, $E(1, 1)$ *et* H_3.

Démonstration. Dans la proposition 2.4, en prenant $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma = 0$, on montre que $E(2)$ possède une métrique invariante à gauche plate. En effet, on a

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_3 = 0 ,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = e_2 , \qquad \nabla_{e_3} e_2 = -e_1 .$$

Il s'ensuit que

$$R(e_1, e_2) = R(e_2, e_3) = R(e_3, e_1) = 0 ,$$

où R est le tenseur de courbure de la pseudo-métrique.

Pour $E(1, 1)$, on considère la métrique correspondant à $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$ dans la proposition 2.4. Le calcul montre que

$$\nabla_{e_1} = 0 , \qquad \nabla_{e_3} = 0 , \qquad \nabla_{e_2} e_1 = e_3 , \qquad \nabla_{e_2} e_3 = e_1 , \qquad \nabla_{e_2} e_2 = 0 .$$

Il s'ensuit que

$$R(e_1, e_3) = R(e_3, e_2) = R(e_2, e_1) = 0 .$$

Pour le groupe de Heisenberg on considère la métrique correspondant à $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ dans la proposition 2.5. Le calcul montre que

$$\nabla_{e_1} = 0 , \qquad \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_3} e_1 = e_2 - e_3 , \qquad \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = -e_1 .$$

Ainsi, on obtient

$$R(e_1, e_3) = R(e_1, e_2) = R(e_2, e_3) = 0 . \qquad \square$$

Remarque 1. On notera que Milnor [5] a démontré que le groupe $E(2)$ possède une métrique riemannienne invariante à gauche plate contrairement aux groupes $E(1, 1)$ et H_3 (voir corollaires 4.6, 4.7 et 4.8 dans la réf. [5]).

Remarque 2. Le groupe SO(3) (ou SU(2)) n'admet pas de métrique de Lorentz invariante à gauche plate. En effet pour toute métrique de Lorentz sur SO(3) (voir la proposition 2.4), on a

$$R(e_1, e_2)e_1 = [\tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2+\tfrac{1}{4}\gamma^2-\tfrac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)]e_2,$$

avec $\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2+\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)>0$ car $\alpha>0, \beta>0$ et $\gamma<0$.

4. Métriques de Lorentz invariantes à gauche sur H_3

On donne la classification à automorphisme de l'algèbre de Lie h_3 près, des métriques de Lorentz invariantes à gauche sur le groupe de Heisenberg H_3.

Théorème 4.1. *Toute métrique de Lorentz invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg* H_3 *est isomorphe, à automorphisme de l'algèbre de Lie* h_3 *près, à l'une des métriques de Lorentz suivantes:*

$$g_1 = -\frac{1}{\lambda^2}\,dx^2+dy^2+(x\,dy+dz)^2,$$

$$g_2 = \frac{1}{\lambda^2}\,dx^2+dy^2-(x\,dy+dz)^2, \quad \lambda\neq 0,$$

$$g_3 = dx^2+(x\,dy+dz)^2-((1-x)\,dy-dz)^2.$$

L'algèbre des champs de Killing de g_1 *et* g_2 *est de dimension quatre, celle de* g_3 *est de dimension six.*

Démonstration. L'algèbre de Lie de Heisenberg a une base constituée de

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad e_3 = \lambda\frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda\neq 0,$$

pour laquelle

$$[e_2, e_3] = \lambda e_1, \qquad [e_3, e_1] = 0, \qquad [e_2, e_1] = 0.$$

Les formes duales invariantes à gauche sont alors

$$\omega_1 = x\,dy+dz, \qquad \omega_2 = dy, \qquad \omega_3 = (1/\lambda)\,dx.$$

La métrique de Lorentz invariante à gauche admettant $\{e_1, e_2, e_3\}$ comme base pseudo-orthonormale n'est rien d'autre que g_1. Toute métrique de Lorentz correspondant à $\beta=\gamma=0$ dans la proposition 2.4 est isomorphe, à automorphisme de l'algèbre de Lie h_3 près, à g_1

L'algèbre de Lie des champs de Killing de la variété (H_3, g_1) admet comme base

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\lambda} - \lambda y^2\right) e_1 + \frac{x}{\lambda} e_2 + y e_3\,, \qquad X_2 = -\lambda y e_1 + e_3\,,$$

$$X_3 = -x e_1 + e_2\,, \qquad X_4 = e_1\,.$$

La métrique g_2 correspond au cas où $\alpha = \beta = 0$ dans la proposition 2.4; ce cas se traite de la même manière que le précédent; on omettra sa démonstration.

La métrique g_3 correspond au cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ dans la proposition 2.5. On choisit une base de l'algèbre de Lie de H_3:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + (1-x)\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad e_3 = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

pour laquelle

$$[e_2, e_3] = 0\,, \qquad [e_3, e_1] = e_2 - e_3\,, \qquad [e_2, e_1] = e_2 - e_3\,.$$

Les formes duales invariantes à gauche sont

$$\omega_1 = \mathrm{d}x\,, \qquad \omega_2 = x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\,, \qquad \omega_3 = (1-x)\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z\,.$$

La métrique de Lorentz invariante à gauche sur H_3 admettant $\{e_1, e_2, e_3\}$ comme base pseudo-orthogonale est exactement g_3.

L'algèbre de Lie des champs de Killing de (H_3, g_3) admet comme base les champs suivants:

$$X_1 = y^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - (2x-1)y\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$X_4 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + (x^2 - x)\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad X_5 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad X_6 = \frac{\partial}{\partial z}\,. \qquad \square$$

Bibliographie

[1] S.P. Gavrilov, Reduction of a symmetric non degenerate form on two-dimensional and three-dimensional real Lie algebras, Gravitatsiya Teor. Otnositel'nosti 17 (1980) 12–23.

[2] T. Hangan, Sur la dépendance fonctionnelle de polynômes homogènes de degrés 2, 2, 3, sous presse.

[3] N. Jacobson, Lie algebras (Interscience, New York, 1962).

[4] A. Médina, Groupes de Lie munis de pseudo-métriques de Riemann biinvariantes, Séminaire de Géométrie Différentielle (Montpellier, 1981–1982).

[5] J. Milnor, Curvature of left invariant metrics on Lie groups, Adv. Math. 21 (1976) 293–329.

[6] K. Nomizu, Left invariant Lorentz metrics on Lie groups, Osaka J. Math. 16 (1979) 143–150.

[7] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity (Academic Press, New York, 1983).